On generic Kripke Structures (Model theoretic techniques for constructing infinite structures)

AUTHOR(S):

池田, 宏一郎; 岡本, 圭史

数理解析研究所講究録
第 1602 巻 2008 年 85-89

On generic Kripke Structures

池田宏一郎* (法政大学経営学部)
岡本圭史 (産業技術総合研究所)

Abstract

Halpern-Kapron は命題様相論理において 0-1 則が成り立つことを証明した．ここで，関係確率および付値確率はともに定数関数である．本論文では，関係確率あるいは付値確率が必ずしも定数関数でない場合の 0-1 則について述べる．

1 背景

$L = \{R(*,*)\}$ を命題様相論理の言語とし，命題変数の集合を $\mathcal{P} = \{\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, ..., \mathrm{p}_j\}$ とする．いま，S を集合，$V : \mathcal{P} \to 2^S$ とするとき，(S, R, V) を言語 L におけるクリプケ構造という．クリプケ構造 $A = (S, R, V)$ に対して，

- $r(A) = |\{(a, b) \in S \times S : R(a, b)\}|$
- $v_i(A) = |\{a \in S : a \in V(\mathrm{p}_i)\}| \qquad (i = 1, 2, ..., j)$

とそれぞれ書くことにする．各 $i = 0, 1, ..., j$ に対して，関数 $p_i : \omega \to [0, 1]$ を固定する．有限集合 $S_n = \{1, 2, ..., n\}$ 上のクリプケ構造 A に対して，A の確率を

$$P^{\bar{p}}(A) = p_0(n)^{r(A)}(1 - p_0(n))^{n^2 - r(A)} \prod_{1 \leq i \leq j} p_i(n)^{v_i(A)}(1 - p_i(n))^{n - v_i(A)},$$

で定義する（ここで $\bar{p} = p_0 p_1 ... p_j$）．$p_0$ を関係確率，$p_1, ..., p_j$ を付値確率と呼ぶ．各 $n \in \omega$ に対して，様相論理式 ϕ の確率を

$$P_n^{\bar{p}}(\phi) = \sum \{P^{\bar{p}}(A) : A = (S_n, R, V) \models \phi\}.$$

で定義する．このとき，各様相論理式 ϕ に対して

*Research partially supported by Grants-in-Aid for Scientific Research (no.19540150), Ministry of Education, Science and Culture.

$$\lim_{n\to\infty} P_n^{\bar{p}}(\phi) = 0 \text{ または } 1$$

を満たすことを 0-1 則（zero-one law）という．0-1 則が成り立つかどうかは，関係確率と付値確率，つまり $\bar{p}$ の与え方に依存する．様相論理の 0-1 則に関しては，次の事実がよく知られている．また，その証明にはランダムグラフが使われている．

事実 (Halpern-Kapron, [3]) 関係確率と付値確率がともに定数関数のとき，0-1 則が成り立つ．

しかし，関係確率や付値確率が定数関数でないときの 0-1 則についての結果は（著者達の知る限り）存在しない．そこで，ランダムグラフの一般化であるジェネリックグラフを用いて 0-1 則を解析することを試み，以下の結果を得ることができた．

定理 1 関係確率が $p_0(n) = n^{-\alpha}$（α は 0 以上 1 以下の無理数），付値確率が定数関数のとき，0-1 則が成り立つ．

定理 2 関係確率が $p_0(n) = n^{-\alpha_0}$，付値確率が $p_i(n) = n^{-\alpha_i}$（$i = 1, 2, ..., j$）とし，$\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_j \in (0, 1)$ は有理数上独立であるとする．このとき 0-1 則が成り立つ．

定理 1 と定理 2 の証明は類似している．以下では，定理 1 の証明の概略を述べる．

2 定理 1

仮定 α を 0 以上 1 以下の無理数とする．関係確率を $p_0(n) = n^{-\alpha}(= p)$ とし，付値確率を定数関数とする．

いま，有限クリプケ構造 A に対して

- $\delta_\alpha(A) = |A| - \alpha r(A)$
- $\mathbf{K}_\alpha = \{A : \forall B \subset A, \delta_\alpha(B) \geq 0\}$

と定義する．$\delta_\alpha(*)$ の α は以後省略する．また，$\delta(B/A) = \delta(B \cup A) - \delta(A)$ と書く．ここで，2 つのクリプケ構造 $A \subset B$（A は有限）に対して

- $A \leq B \quad \Leftrightarrow \quad \delta(B/A) \geq 0$ for each finite $X \subset B - A$

と定義する．可算なクリプケ構造 M が次を満たすとき $\mathbf{K}_\alpha$-generic であるという：

- 有限な $A \subset M$ に対して $A \in \mathbf{K}_\alpha$
- $A \leq B \in \mathbf{K}_\alpha$ かつ $A \leq M$ ならば $B' \cong_A B$ を満たす $B' \leq M$ が存在

注意 3　命題様相論理の言語 L に対して，1 階論理の言語を $L^f = \{R(*,*)$ $, P_1(*), P_2(*), ..., P_j(*)\}$ とする．このとき様相論理式 ϕ に対して，1 階論理式 $\phi^f(x)$ を次のように帰納的に定義する：

- $\mathrm{p}_i^f = P_i(x)$ for each $\mathrm{p}_i \in \mathcal{P}$
- $(\phi \wedge \psi)^f = \phi^f \wedge \psi^f$
- $(\neg\phi)^f = \neg\phi^f$
- $(\Box\phi)^f = \forall y(R(x,y) \to \phi^f(y))$

さらに，クリプケ構造 $A = (S, R, V)$ に対して，1 階の構造 $A^f = (S, R, P_1, ..., P_j)$ を，各 $i = 1, ..., j$ に対して $P_i^{A^f} = V(p_i)$ となるように定義する．

有限クリプケ構造 A に対して，$\psi_A(\bar{x})$ は $\bar{x} \cong A^f$ を表す論理式とする．

補題 4　M を $\mathbf{K}_\alpha$-generic クリプケ構造とする．このとき $\mathrm{Th}(M^f)$ は次の $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ によって公理化される:

- $\Sigma_1 = \{\neg\exists\bar{x}\psi_A(\bar{x}) : A \notin \mathbf{K}_\alpha\}$
- $\Sigma_2 = \{\forall\bar{x}(\psi_A(\bar{x}) \to \exists\bar{y}\psi_{AB}(\bar{x}\bar{y})) : A \leq B \in \mathbf{K}_\alpha\}$

証明の概略　[1]（あるいは [2]）と同様の議論により，まず次の主張を示すことができる．
主張 1：任意の $A \leq B \in \mathbf{K}_\alpha$ と $n \in \omega$ と $\epsilon > 0$ に対して，$A \leq C, B \leq_n C, \delta(C/A) < \epsilon$ を満たす $C \in \mathbf{K}_\alpha$ が存在．

$N^f \models \Sigma$ が $\aleph_1$ 飽和となるようなクリプケ構造 N を選ぶ．$\overline{\mathbf{K}}_\alpha = \{B : A \in \mathbf{K}_\alpha$ for any finite $A \subset B\}$ とする．主張 1 より次の主張が示される．
主張 2：$D \leq N$ を満たす可算な $D \leq E \in \overline{\mathbf{K}}_\alpha$ に対して，$E' \leq N$ を満たす $E' \cong_D E$ が存在．

M^f の $\aleph_1$ 飽和な拡大も主張 2 を満たすので，往復論法より $M^f \equiv N^f$. よって Σ は完全である.

簡単のため，様相論理式の確率 $P_n^{\bar{p}}(\phi)$ を $P_n(\phi)$ と書くことにする. 注意 3 より，様相論理式は 1 階論理式に自然に翻訳できる. そこで様相論理式の確率と同様に，1 階論理式 ψ の確率は次のように定義できる：まず $S_n = \{1, 2, ..., n\}$ 上の有限構造 A に対してその確率を $P^f(A) = p(n)^{r(A)}(1-p(n))^{n^2-r(A)}$ と定義する. そして各 $n \in \omega$ に対して，1 階論理式 ψ の確率を $P_n^f(\psi) = \sum\{P^f(A) : A = (S_n, R) \models \psi\}$ で定義する.

補題 5 任意の $\sigma \in \Sigma$ に対して，$\lim_{n\to\infty} P_n^f(\sigma) = 1$.

証明 $\sigma \in \Sigma_1$ であるとすると，$\sigma = \neg\exists\bar{x}\psi_A(\bar{x})$（ここで $A \notin \mathbf{K}_\alpha$）. $k = |A|, l = r(A)$ とする. ここで $\delta(A) = k - l\alpha < 0$ と仮定してよい. このとき

$$\begin{aligned} P_n^f(\neg\sigma) &= P_n^f(\exists\bar{x}\psi_A(\bar{x})) \\ &\leq (n)_k p^l (1-p)^{k^2-l} \\ &\leq n^k n^{-l\alpha} \\ &= n^{k-l\alpha} \to 0 \quad (n \to \infty) \end{aligned}$$

$\sigma \in \Sigma_2$ であるとすると，$\sigma = \forall\bar{x}(\psi_A(\bar{x}) \to \exists\bar{y}\psi_{AB}(\bar{x}\bar{y}))$（ここで $A \leq B \in \mathbf{K}_\alpha$）. $s = |A|, k = |B - A|, l = r(B) - r(A)$ とする. ここで $\delta(B/A) = k - l\alpha \geq 0$ であることに注意すると

$$\begin{aligned} P_n^f(\neg\sigma) &= P_n^f(\exists\bar{x}(\psi_A(\bar{x}) \wedge \forall\bar{y}\neg\psi_{AB}(\bar{x}\bar{y}))) \\ &\leq (n)_s \left\{1 - p^l(1-p)^{(k+s)^2-l}\right\}^{\binom{n-s}{k}} \\ &\sim n^s \left(1 - n^{-l\alpha}\right)^{n^k} \\ &\leq n^s e^{-n^{k-l\alpha}} \to 0 \quad (n \to \infty) \end{aligned}$$

定理 1 を証明するためには，次の命題が示されれば十分である.

命題 6 M を $\mathbf{K}_\alpha$-generic クリプケ構造とする. このとき任意の様相論理式 ϕ に対して

(1) $M \models \phi$ ならば $\lim_{n\to\infty} P_n(\phi) = 1$.

(2) $M \not\models \phi$ ならば $\lim_{n\to\infty} P_n(\phi) = 0$.

証明 (1) $M \models \phi$ と仮定する．このとき $M^f \models \forall x \phi^f$．補題 4 より，$\sigma_1 \wedge \ldots \wedge \sigma_k \vdash \forall x \phi^f$ を満たす $\sigma_1, \ldots, \sigma_k \in \Sigma$ が存在する．補題 5 より，$P_n(\phi) = P_n^f(\forall x \phi^f) \geq P_n^f(\sigma_1 \wedge \ldots \wedge \sigma_k) \to 1 \ (n \to \infty)$.
(2) $M \not\models \phi$ と仮定すると $M \models \neg\phi$. (1) より $\lim_{n\to\infty} P_n(\neg\phi) = 1$. 従って $P_n(\phi) = 1 - P_n(\neg\phi) \to 1 - 1 = 0 \ (n \to \infty)$.

参考文献

[1]K. Ikeda, H. Kikyo and A. Tsuboi, On generic structures with a strong amalgamation property, 投稿中
[2] 池田宏一郎，モデル理論のランダムグラフへの応用，京都大学数理解析研究所講究録 1525(2006)，5 頁–14 頁
[3] J. Halpern and B. Kapron, Zero-one laws for modal logic, Annals of Pure and Applied Logic, vol.69, 157–193, 1994